Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 6 **WS 03/04 Abgabetermin: 25.11.03**

[H16] Schlafender und schneller Kreisel **(2+2 Punkte)**

Betrachten Sie den schweren symmetrischen Kreisel mit dem effektiven Potential (aus der Vorlesung)

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\ I_1 \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2\ I_3} + Mg\ell\cos\theta \quad .$$

(a) *Schlafender Kreisel*: Ist eine Lösung $\theta(t) = 0$ (vertikale Rotation) möglich und auch stabil? *Hinweis*: $\theta = 0$ erzwingt eine Bedingung an die Impulse. Entwickeln Sie V_{eff} unter dieser Bedingung um $\theta = 0$ und diskutieren Sie die Stabilität.

(b) *Schneller Kreisel*: Für schnelle Kreisel dominiert $\dot\psi \gg \dot\varphi, \dot\theta$, und $T_{\text{rot}} \gg V$. Dies ist gleichbedeutend mit $g \to 0$, d.h. dem in einem Punkt festgehaltenen freien Kreisel. Bestimmen Sie für diesen Fall die Frequenzen der Nutation $\dot\theta$, der Präzession $\dot\varphi$ und der Rotation $\dot\psi$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus der Vorlesung. *Hinweis*: Starten Sie mit der Beobachtung, daß für $g = 0$ auch p_θ erhalten ist, und finden Sie $\theta(t)$. Welchen Wert für p_θ erlaubt die Form von V_{eff}?

[H17] Hamilton, axialsymmetrisch **(2+1 Punkte)**

Ein Teichen (Masse m) bewege sich in einem bezüglich der z-Achse symmetrischen Potential, d.h. $V = V(\rho, z)$ in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z).

(a) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion H in Zylinderkoordinaten und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

(b) Wie lautet die Hamiltonfunktion H' und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in einem Koordinatensystem, das um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiert?

[H18] Poisson-Klammern des Drehimpulses **(1+1+1 Punkte)**

Die Poisson-Klammer zweier Phasenraumfunktionen $A(q,p),\ B(q,p)$ ist wie folgt definiert ($q = \{q^i\},\ p = \{p_i\}$):

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \quad .$$

(a) Es seien q^i $, i = 1, 2, 3,$ die kartesischen Koordinaten eines Teilchens in drei Dimensionen. Berechnen Sie für die Drehimpulse $L_i = {\varepsilon_{ij}}^k q^j p_k$ die Poisson-Klammern $\{L_i, q^\ell\}$ und $\{L_i, p_\ell\}$.

(b) Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_i, L_m\}$, und drücken Sie das Ergebnis durch eine Linearkombination der Drehimpulse aus.

(c) Zeigen Sie, daß ein System, das invariant unter Drehungen um die 1- und 2-Achse ist, auch rotationssymmetrisch bezüglich der dritten Achse ist.

Hinweis: Ein System ist rotationssymmetrisch um eine Achse $\vec{n}$, falls seine Hamiltonfunktion H mit dem Drehimpuls $\vec{n} \cdot \vec{L}$ um diese Achse eine verschwindende Poisson-Klammer hat, also $n^i\{L_i, H\} = 0$.

Vorlesung: O. Lechtenfeld - Übungen: R. Wimmer